Резюме докладов, сделанных на заседании секции теории вероятностей и математической статистики Московского математического общества,

Теория вероятн. и ее примен., 1973, том 18, выпуск 4, 873–885

https://www.mathnet.ru/tvp4397

представить в виде

$$q^L(t, x_L, \Gamma) = \sum_{a \in K_L} q^L(t, x_L, \Gamma \cap X_L(a)), \text{ где } X_L(a) = \{y_L \in Y^{K_L} : y_b = x_b, b \in K_L \setminus a\},$$

причем, для $a \in Z^\nu$, таких, что $B_a \subset K_L$,

$$q^L(t, x_L, \Gamma \cap X_L(a)) = q^a(t, \mathrm{pr}_a[\Gamma \cap X_L(a)] \mid x_b, b \in B_a).$$

Пусть при каждом $L = 1, 2, \ldots$ фиксировано сужение $\xi^L(t)$ семейства Q на куб K_L.

Пусть $\hat{x} = (y_a, a \in Z^\nu)$ — произвольный вектор из Y^{Z^ν}, а $x_L = pr_{K_L}\hat{x}$. Для произвольного конечного $C \subset Z^\nu$ обозначим $p_C^L(t, \cdot \mid t_0, x_L)$ совместное распределение в момент времени t компонент из C сужения $\xi^L(t)$ при условии $\xi^L(t_0) = x_L$, $t_0 < t$.

Теорема. *При $L \to \infty$ последовательность мер $P_C^L(t, \cdot \mid t_0, x_L)$ сходится по вариации, причем предел*

$$P_C^\infty(t, \cdot \mid t_0, \hat{x}) = (\mathrm{var}) \lim P_C^L(t, \cdot \mid t_0, x_L)$$

не зависит от выбора последовательности сужений на K_L и сходимость является равномерной по $\hat{x}$, $t_0 < t < T < \infty$.

При фиксированных t_0, t, $\hat{x}$ совокупность величин $\mathcal{P} = \{P_C^\infty(t, \cdot \mid t_0, \hat{x})\}$ задает согласованную систему вероятностных мер на конечномерных цилиндрах.

Если на пространство $(Y, \mathfrak{S})$ наложить дополнительные ограничения, обеспечивающие применимость теоремы Колмогорова (например, Y — полное сепарабельное метрическое пространство; $\mathfrak{S}$ — его борелевская σ-алгебра), то семейство $\mathcal{P}$ определяет вероятностную меру $P(t, \cdot \mid t_0, \hat{x})$ в пространстве Y^{Z^ν}.

Нетрудно проверить, что мера $P(t, \cdot \mid t_0, \hat{x})$ является переходной вероятностью некоторого марковского процесса с фазовым пространством Y^{Z^ν}.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. Л. Добрушин, Марковские процессы с большим числом локально взаимодействующих компонент — существование предельного процесса и его эргодичность, Проблемы передачи информации, **VII**, 2 (1971).

[2] И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, М., изд-во «Наука», 1965.

РЕЗЮМЕ ДОКЛАДОВ, СДЕЛАННЫХ НА ЗАСЕДАНИЯХ СЕКЦИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

(*февраль — май 1973*)

SUMMARIES OF REPORTS PRESENTED AN SESSIONS OF THE PROBABILITY AND STATISTICS SECTION OF THE MOSCOW MATHEMATICAL SOCIETY

(*February — May 1973*)

Заседание 14 февраля

Чибисов Д. М. Асимптотические методы в математической статистике. (Čibisov D. M., Asymptotic methods in mathematical statistics.)

Заседание 28 февраля

Козлов М. В., Блуждание в одномерной случайной среде. (Kozlov M. V., Random walk on the line with stochastic structure.)

Содержание доклада опубликовано в журнале «Теория вероятностей и ее применения», XVIII, 2 (1973), 406, 407.

Малышев В. А. Неоднородные многомерные случайные блуждания. (Malyšev V. A., Non-homogeneous multidimensional random walks.)

Дан обзор результатов для многомерных случайных блужданий с неоднородностями на гиперплоскостях в плане развития соответствующей одномерной теории (на полупрямой, см. [1]).

Известные ранее случаи разрешимости методом Винера — Хопфа, а также многие другие (например, при независимости блужданий вдоль каждой из осей) допускают простое аналитическое решение благодаря либо конечности и коммутативности некоторой группы Галуа [2], либо коммутативности некоторой операторной алгебры. Приводится также некоторое факторизационное тождество, выявляющее структуру решения в общем случае.

Приведем два точных утверждения. Рассмотрим стохастический оператор $\mathbf{Q}$ в $l^1(\mathbf{Z}_+^2)$:

$$\{\xi_{kl},\ k,\ l \geqslant 0\} \to \left\{\sum_{k,\, l=0}^{\infty} p_{i-k,\, j-l}\xi_{kl},\ i,\ j \geqslant 0\right\},\quad \sum p_{mn} = 1,\ p_{mn} \geqslant 0.$$

Введем производящую функцию $q(x, y, z) = 1 - z \sum\limits_{m,\, n=-\infty}^{\infty} p_{mn}x^m y^n$, $|z| < 1$, и операторную производящую функцию $\mathbf{Q}(x, z)$, значениями которой являются операторы в $l^1(\mathbf{Z}_+)$ вида

$$\{\xi_i,\ i \geqslant 0\} \to \left\{\xi_i - z\sum_{j=0}^{\infty} p_{i-j}\xi_j,\ i \geqslant 0\right\} \text{ с } p_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} p_{mn}x^m.$$

Теорема 1. *Если (при некотором z) операторы $\mathbf{Q}(x, z)$ коммутируют при всех x, $|x| = 1$, то*

$$(1 - z\mathbf{Q})^{-1} = \exp[-\mathbf{P}_+^x \ln \mathbf{Q}(x, z)]\, \mathbf{P}_+^x \exp[-\mathbf{P}_-^x \ln \mathbf{Q}(x, z)], \tag{1}$$

где $\mathbf{P}_+^x\left(\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_i x^i\right) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_i x^i$, a_i *— либо элемент* $l^1(\mathbf{Z}_+)$, *либо ограниченный оператор в* $l^1(\mathbf{Z}_+)$, $\mathbf{P}_-^x = 1 - \mathbf{P}_+^x$.

Условия теоремы 1 будут выполняться, если либо $\Sigma p_{mn}x^m y^n = p(x)\,\tilde{p}(y)$, либо $\Sigma p_{mn}x^m y^n = p(x) + \tilde{p}(y)$ для некоторых $p(x)$ и $\tilde{p}(y)$ (т. е. блуждания по каждой из осей в дискретном или непрерывном времени независимы).

В случае некоммутативности $\mathbf{Q}(x, z)$ для разных x тождество (1) усложняется необходимостью факторизации некоторой канонически фредгольмовой оператор-функции.

Теорема 2. *В общем случае*

$$(1 - z\mathbf{Q})^{-1} = \exp[-\mathbf{P}_{++} \ln q]\, \mathbf{P}_+^y \exp[-\mathbf{P}_{+-} \ln q] \times$$
$$\times (1 + \mathbf{K}_+)^{-1}\mathbf{P}_+^x (1 + \mathbf{K}_-)^{-1} \exp[-\mathbf{P}_{-+} \ln q]\, \mathbf{P}_+^y \exp[-\mathbf{P}_{--} \ln q]$$

Здесь $1 + \mathbf{K}(x) = (1 + \mathbf{K}_-(x))(1 + \mathbf{K}_+(x))$ *— правая каноническая факторизация с вполне непрерывной оператор-функцией* [3]

$$\mathbf{K}(x) = \exp[-\mathbf{P}_{-+} \ln q]\, \mathbf{P}_+^y \exp[\mathbf{P}_{-+} \ln q],$$
$$\mathbf{P}_-^y \exp[\mathbf{P}_{+-} \ln q]\, \mathbf{P}_+^y \exp[-\mathbf{P}_{+-} \ln q],$$

где, например,

$$\mathbf{P}_{+-}\left(\sum_{i,\,j=-\infty}^{\infty} a_{ij}x^iy^j\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{-1} a_{ij}x^iy^j,$$

а exp [·] *можно понимать как оператор свертки с производящей функцией* exp [·] *в пространстве* l^1 $(\mathbf{Z}^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Ф. Ч. Кингман, Об алгебре очередей, Сб. переводов «Математика», 15 : 2 (1971), 126—165.

[2] В. А. Малышев, Простые явные формулы для некоторых случайных блужданий в четверти плоскости, в сб.: «Вероятностные методы исследования», М., изд-во МГУ, 1972.

[3] И. Ц. Гохберг, Задача факторизации оператор-функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 5 (1964), 1055—1082.

Заседание 14 марта

Вентцель А. Д., Предельные теоремы о больших уклонениях для случайных процессов. (Wentzell A. D., Limit theorems on large deviations for stochastic processes.)

1. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины; A_n и B_n — константы, такие, что случайная величина $\zeta_n = (\xi_1 + \ldots + \xi_n - A_n)/B_n$ имеет предельное распределение. Тогда теоремы о предельном поведении $\mathbf{P}\,\{\zeta_n > x_n\}$ при $n \to \infty$, $x_n \to \infty$ — это предельные теоремы о больших уклонениях. Другие виды теорем о больших уклонениях — локальные, где речь идет, скажем, о плотности распределения ζ_n в точке $x_n \to \infty$; или теоремы, где рассматриваются математические ожидания, основная часть которых обусловлена большими уклонениями.

Имеется два крайних типа предельного поведения вероятностей больших уклонений. Первый тип — случай, когда для величин ξ_i выполняется условие Крамера: $\mathrm{M}\exp\{z\xi_i\} < \infty$. При этом главная часть вероятности $\mathbf{P}\,\{\zeta_n \in x_n\}$ — это вероятность того, что ζ_n находится в малой окрестности справа от x_n, и она образуется в основном за счет слагаемых $\xi_1, \ldots, \xi_n$ приблизительно одинаковой величины; асимптотика этой вероятности показательная. Теоремы такого рода могут получаться применением преобразования распределений, предложенного Г. Крамером [1].

Второй тип — случай, когда $\xi_i \geqslant 0$ принадлежат зоне притяжения устойчивого закона. Здесь вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_n > x_n\}$ не эквивалентна $\mathbf{P}\,\{\zeta_n \in (x_n, x_n(1+\varepsilon))\}$; ее основная часть образуется за счет того, что одно из слагаемых ξ_i может быть примерно так же велико, как вся сумма; асимптотика здесь степенная. (Имеются также теоремы, устанавливающие поведение вероятностей больших уклонений, промежуточное между двумя крайними типами.)

2. Какими могут быть обобщения теорем о больших уклонениях на случайные процессы? Обобщение может состоять, во-первых, в том, что вместо сумм возрастающего числа независимых случайных величин рассматривается семейство случайных процессов ξ_t^a, зависящее от параметра a. Во-вторых, в том, что вместо вероятностей, касающихся одной случайной величины или конечного числа значений процесса, могут рассматриваться вероятности вида $\mathbf{P}\,\{\xi_\cdot^a \in A^a\}$, где A^a — множество в функциональном пространстве. (Этот второй аспект обобщения, по-видимому, не касается локальных теорем, где речь будет идти о плотностях распределения величин ξ_t^a.)

Для того чтобы можно было исследовать вероятности больших уклонений, нет необходимости, чтобы были установлены предельные теоремы о вероятностях небольших уклонений. Теоремы о больших уклонениях могут быть в некоторых случаях даже проще, чем о небольших,— когда основную часть вероятности большого уклонения составляет вероятность множества реализаций случайного процесса, проходящих в малой окрестности какой-то функции.

Два крайних типа предельного поведения вероятностей больших уклонений сохраняются и для случайных процессов. Первый тип характеризуется тем, что основная часть реализаций процесса будет близка к той или иной «хорошей» функции, даже если речь идет о больших уклонениях и маловероятных событиях. Дальнейшее будет относиться именно к этому типу предельного поведения, поэтому приведем пример второго типа. Пусть $\xi_t^h = h\xi_t$, где ξ_t — процесс Коши, $\xi_0 = 0$; и нас интересует предельное поведение $\mathbf{P}\{\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \xi_t^h > 1\}$ при $h \to 0$. Типичная реализация ξ_t^h, выходящая за уровень 1, делает один большой скачок величины $\geqslant 1$ или лишь чуть меньше, а до этого скачка и после реализация остается приблизительно постоянной.

3. Мы будем рассматривать теоремы, устанавливающие первый тип предельного поведения вероятностей больших уклонений, при выполнении аналога условия Крамера; причем только самые грубые такие теоремы — те, в которых речь идет об асимптотике с точностью до логарифмической эквивалентности. (Автор считает, что из грубых предельных теорем можно вывести больше грубых следствий, чем тонких следствий из тонких предельных теорем; и видит в этом одно из оправданий ограничения грубыми теоремами.) Грубые предельные теоремы для различных случайных процессов были получены в последние годы (например, в работах [2] — [4], а также [5], где для винеровского процесса получены и более тонкие результаты).

Такие теоремы могут основываться на парах оценок следующего вида. Далее E — какое-то функциональное пространство, которому принадлежат реализации случайного процесса ξ_t; ρ — расстояние в нем; $I(\varphi_.)$ — неотрицательный функционал на определенном подмножестве $\Phi \subseteq E$; $\Phi(i) = \{\varphi_. : I(\varphi_.) \leqslant i\}$.

Оценка типа 1. $\mathbf{P}\{\rho(\xi_., \varphi_.) < \varepsilon\} > \exp\{-I(\varphi_.) - R_1(\varepsilon, \varphi_.)\}$.

Оценка типа 2. $\mathbf{P}\{\rho(\xi_., \Phi(i)) \geqslant \varepsilon\} < \exp\{-i + R_2(i, \varepsilon)\}$.

Здесь функционал I характеризует «трудность» прохождения реализации вблизи «хорошей» функции $\varphi_.$; мы будем называть его *функционалом действия* (ср. с [4]). Такие оценки будут полезны для получения предельных теорем, касающихся процесса ξ_t^a, зависящего от параметра, если остаточные члены R_1^a, R_2^a окажутся малы по сравнению с типичными значениями функционала действия I^a.

4. Здесь имеется несколько отдельных вопросов: а) как угадать вид функционала действия для сколько-нибудь широких классов случайных процессов? б) как получить для них оценки типов 1, 2? в) какие следствия можно вывести из этих оценок? Если у нас есть общие методы получения оценок типа 1 или 2, это дает надежду получить ответ и на вопрос а). Для описываемых далее классов случайных процессов, наиболее близких к схеме сумм независимых величин, удовлетворяющих условию Крамера, оценки типа 1 получаются с помощью *обобщенного преобразования Крамера*; и для них выписывается функционал действия.

5. Далее рассматриваются два класса марковских процессов в евклидовом пространстве (для простоты обозначений ограничиваемся одномерным случаем). В качестве расстояния в пространстве функций берется $\rho_{0T}(\varphi_., \psi_.) = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} |\varphi_t - \psi_t|$.

А. *Неоднородная по времени цепь Маркова* (ξ_t, $t = 0, 1, 2, \ldots, T$; $\mathbf{P}_{s,x}$). Полагаем $G(s, x; z) = \ln \mathbf{M}_{s,x} \exp\{z(\xi_{s+1} - x)\}$ ($\mathbf{M}_{s,x}$—математическое ожидание, соответствующее вероятности $\mathbf{P}_{s,x}$); $z(s, x; u)$ — решение уравнения

$$\partial G(s, x; z)/\partial z = u;\ H(s, x; u) = z(s, x; u)\, u - G(s, x; z(s, x; u)).$$

Преобразование Крамера, соответствующее функции $z(i, x)$, $i = 0, 1, \ldots, T-1$, $x \in R^1$, состоит в замене совместного распределения $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_T$ распределением, имеющим относительно него плотность

$$p_z(x_1, \ldots, x_T) = \exp\left\{\sum_{i=0}^{T-1}[z(i, x_i)\cdot(x_{i+1}-x_i) - G(i, x_i; z(i, x_i))]\right\}.$$

Функционал действия:

$$I(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_T) = \sum_{i=0}^{T-1} H(i, \varphi_i; \varphi_{i+1}-\varphi_i).$$

Б. *Неоднородный по времени марковский процесс* (ξ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$; $\mathbf{P}_{s,x}$) *с непрерывными справа траекториями.* Предполагается, что равномерно по s и x существует

$$\lim_{t \downarrow s}(t-s)^{-1}[\mathbf{M}_{s,x}\exp\{z(\xi_t - x)\} - 1] = G(s, x; z).$$

Так же, как и выше, определяются $z(s, x; u)$, $H(s, x; u)$. Преобразование Крамера, соответствующее данной (достаточно хорошей) функции $z(t, x)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $x \in R^1$, состоит в замене распределения процесса ξ_t в пространстве функций на отрезке $[0, T]$ другим, абсолютно непрерывным относительно него с плотностью

$$p_z(x_\cdot) = \exp\left\{\int_0^T z(t-, x_{t-})\,dx_t - \int_0^T G(t, x_t; z(t, x_t))\,dt\right\}.$$

Здесь первый интеграл — стохастический интеграл типа Ито: при его определении функция $z(t, x_t)$ должна аппроксимироваться функциями, определяемыми по ее прошлому; если распределение ξ_t всё сосредоточено на множестве функций ограниченной вариации, это будет стилтьесовский интеграл от левого предела функции $z(t, x_t)$.

Функционал действия в случае непрерывного времени определяется для абсолютно непрерывных φ_t равенством

$$I_{0T}(\varphi_\cdot) = \int_0^T H(t, \varphi_t; \dot\varphi_t)\,dt.$$

6. Одна из возможных оценок типа 1 (случай непрерывного времени):

$$\mathbf{P}_{0,x}\{\rho_{0T}(\xi_\cdot, \varphi_\cdot) < \varepsilon\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\exp\left\{-I_{0T}(\varphi_\cdot) - 2\sqrt{\int_0^T ZDZ(t)\,dt} - \int_0^T \Delta H(t)\,dt\right\},$$

если $\varepsilon \geqslant \varepsilon' = 2\sqrt{\int_0^T D(t)\,dt}$, где

$$D(t) = \sup_y \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(t, y; z(t, y; \dot\varphi_t));$$

$$ZDZ(t) = \sup_y \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(t, y; z(t, y; \dot\varphi_t))\cdot z(t, y; \dot\varphi_t)^2;$$

$$\Delta H(t) = \sup_{|y-\varphi_t| \leqslant \varepsilon'} |H(t, y; \dot\varphi_t) - H(t, \varphi_t; \dot\varphi_t)|.$$

Она получается применением преобразования Крамера с функцией $z(t, x) = z(t, x; \dot\varphi_t)$, которое превращает процесс $\xi_t - \varphi_t$ в мартингал.

По-видимому, обобщенное преобразование Крамера может применяться к получению не только грубых оценок типа 1, но и более тонких результатов; в частности, в работе [5] такое преобразование применяется к получению точной асимптотики плотности вероятностей перехода диффузионного процесса $p(t, x, y)$ при $t \downarrow 0$ (но там нет указаний на связь применяемого преобразования с крамеровским).

7. Одна из возможных оценок типа 2:

$$\mathbf{P}_{0,\,x}\{\rho_{0T}(\xi_\cdot,\ \Phi(i)) \geqslant \varepsilon\} \leqslant$$
$$\leqslant ([T/\Delta]+1)\,[\exp\{\Delta\overline{G}(Z_+) - \varepsilon' Z_+\} + \exp\{\Delta\overline{G}(Z_-) - \varepsilon' \,|\, Z_- \,|\}] +$$
$$+ N^{[T/\Delta]+1} \exp\{-i + (\delta + 2\delta_1)\,T\},$$

где Δ и ε' — положительные числа, $\varepsilon' \leqslant \varepsilon/2$, Δ, в случае дискретного времени,— целое; $Z_+ > 0$ и $Z_- < 0$ — такие числа, что $G\,(s,\ y;\ Z_\pm) \geqslant 0$ при всех s, y;

$$\overline{G}(z) = \sup_{s,\ y} G\,(s,\ y;\ z);$$
$$\delta = \sup_{s,\ y;\ |u| \leqslant \varepsilon'/\Delta} [H\,(s,\ y;\ u) - \max_{1 \leqslant i \leqslant N} [z_i u - G\,(s,\ y;\ z_i)]],$$

где $z_1, \ldots, z_N$ — произвольные числа;

$$\delta_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant N}\ \sup_{|s'-s| < \Delta,\ |y'-y| < 2\varepsilon'} |G\,(s,\ y;\ z_i) - G\,(s'\ y';\ z_i)\,|.$$

Максимум, который вычитается из $H\,(s,\ y;\ \ u)$ в определении δ,— это ломаная, описанная снизу вокруг графика этой выпуклой вниз по u функции.

Способ получения оценки: берется случайная ломаная l_t с вершинами в точках $(0,\ \xi_0)$, (Δ, ξ_Δ), $(2\Delta,\ \xi_{2\Delta})$, $\ldots$, $([T/\Delta]\ \Delta,\ \ \xi_{[T/\Delta]\Delta})$, $(T,\ \ \xi_T)$ и событие $A_k = \{\sup\limits_{k\Delta \leqslant t \leqslant (k+1)\Delta} |\,\xi_t - \xi_{k\Delta}\,| < \varepsilon'\}$; имеем:

$$\mathbf{P}_{0,\,x}\{\rho_{0T}(\xi_\cdot,\ \Phi(i)) \geqslant \varepsilon\} \leqslant \mathbf{P}_{0,\,x}(\overline{A}_0 \cup \overline{A}_1 \cup \ldots \cup \overline{A}_{[T/\Delta]}) +$$
$$+ \mathbf{P}_{0,\,x}(A_0 A_1 \ldots A_{[T/\Delta]} \cap \{l_\cdot \notin \Phi(i)\}).$$

Вероятности $\overline{A}_k$ оцениваются с помощью экспоненциального колмогоровского неравенства; а вторая вероятность — с помощью экспоненциального неравенства Чебышева:

$$\mathbf{P}_{0,\,x}(A_0 A_1 \ldots A_{[T/\Delta]} \cap \{I\,(l_\cdot) > i\}) \leqslant e^{-i}\mathbf{M}_{0,\,x}\chi_{A_0}\chi_{A_1}\cdot\cdot\cdot\chi_{A_{[T/\Delta]}} \exp\{I\,(l_\cdot)\}.$$

Математическое ожидание оценивается произведением

$$\prod_{k=0}^{[T/\Delta]} \sup_y \mathbf{M}_{k\Delta,\,y}\chi_{A_k} \exp\left\{\int\limits_{k\Delta}^{(k+1)\,\Delta} H\left(t,\ l_t;\ \frac{\xi_{(k+1)\,\Delta} - \xi_{k\Delta}}{\Delta}\right) dt\right\}.$$

Экспонента не превосходит

$$\exp\{\Delta H\,(k\Delta,\ \xi_{k\Delta};\ \ (\xi_{(k+1)\,\Delta} - \xi_{k\Delta})/\Delta) +\ \Delta\delta_1\} \leqslant$$
$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \exp\{z_i\,(\xi_{(k+1)\,\Delta} - \xi_{k\Delta}) - \Delta\cdot G\,(k\Delta,\ \xi_{k\Delta};\ z_i) + \Delta\,(\delta + \delta_1)\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{N} \exp\{z_i\,(\xi_{(k+1)\,\Delta} - \xi_{k\Delta}) - \Delta G\,(k\Delta,\ \xi_{k\Delta};\ z_i) + \Delta\,(\delta + \delta_1)\}.$$

Далее используется то, что

$$\mathbf{M}_{k\Delta,y}\ \exp\left\{z_i\,(\xi_{(k+1)\,\Delta} - \xi_{k\Delta}) - \int\limits_{k\Delta}^{(k+1)\,\Delta} G\,(t,\ \xi_t;\, z_i)\,dt\right\} = 1,$$
$$\mathbf{M}_{k\Delta,\,y}\,\chi_{A_k} \exp\{z_i\,(\xi_{(k+1)\,\Delta} - \xi_{k\Delta}) - \Delta G\,(k\Delta,\, \xi_{k\Delta};\, z_i)\} \leqslant \exp\,\{\Delta\delta_1\}.$$

Другие оценки типа 2 можно получить, используя ломаные с вершинами в точках вида $(\tau_k,\ \xi_{\tau_k})$, где τ_k — марковские моменты (см. [3]).

8. Из полученных оценок можно вывести ряд теорем о больших уклонениях. Приведем одну пару таких теорем, являющуюся непосредственным следствием оценок.

Пусть $(\xi_t^a,\ \mathbf{P}_{s,x}^a)$ — семейство марковских процессов, характеризуемых функциями $G^a\,(s,\ x;\ z)$ вида $aG^1\,(s,\ x;\ a^{-1}z)$ (т. е. все скачки уменьшаются в a раз по сравнению с процессом ξ^1_t, но происходят в a раз чаще; соответственно изменяется диффузионная часть). Легко видеть, что $H^a(s, x; u) = aH^1(s, x; u)$, так что

$$I^a_{0T}(\varphi.) = a\int_0^T H^1(t, \varphi_t; \dot\varphi_t)\,dt = aS_{0T}(\varphi.).$$

Через $\Phi(s)$ будем обозначать множество $\{\varphi.: S_{0T}(\varphi.) \leqslant s\}$. Предположим, что функции $G^1(s, x; z)$ и $H^1(s, x; u)$ определены и непрерывны для всех значений аргументов вместе с производными до второго порядка по z и по u; $\overline{G}^1(z) = \sup\limits_{s,x} G^1(s, x; z)$ и $\overline{H}^1(u) = \sup\limits_{s,x} H^1(s, x; u)$ конечны.

Теорема 1. *Для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $\gamma > 0$

$$\mathbf{P}^a_{0,x}\{\rho_{0T}(\xi^a_\cdot, \varphi.) < \varepsilon\} > \exp\{-a[S_{0T}(\varphi.) + \gamma]\}$$

при достаточно больших a равномерно по множеству непрерывных кусочно-непрерывно дифференцируемых функций φ_t, $\varphi_0 = x$, *таких, что* $|\dot\varphi_t| \leqslant C < \infty$.

Теорема 2. *Для любых* $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$ *и* $s_0 > 0$

$$\mathbf{P}^a_{0,x}\{\rho_{0T}(\xi^a_\cdot, \Phi(s)) \geqslant \varepsilon\} < \exp\{-a[s - \gamma]\}$$

при достаточно больших a равномерно по $s \leqslant s_0$.

Более отдаленные следствия, к примеру,— такие.

Теорема 3. *Положим* $V_{0T}(x, y) = \inf\{S_{0T}(\varphi.): \varphi_0 = x, \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \varphi_t \geqslant y\}$. *Тогда*

$$\lim_{a\to\infty} a^{-1}\ln \mathbf{P}^a_{0,x}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T} \xi^a_t \geqslant y\} = -V_{0T}(x, y).$$

Интересные следствия из теорем 1, 2 получаются для семейств однородных по времени марковских процессов на неограниченном отрезке времени, соответственно, для семейств порождающих их операторов (см. [3]).

Теорема 4. *Пусть* $\lambda_0(h)$ — *наибольшее собственное значение дифференциального оператора* $h\Delta/2 + \Sigma b^i(x)\,\partial/\partial x^i$ *в ограниченной области D с нулевыми условиями на ее границе. Имеем:*

$$\lambda_0(h) = -h^{-1}[\lim_{T\to\infty} T^{-1} \inf_{\varphi_t\in D,\ 0\leqslant t\leqslant T} S_{0T}(\varphi.) + o(1)]$$

при $h \downarrow 0$, *где*

$$S_{0T}(\varphi.) = \frac{1}{2}\int_0^T \sum (\dot\varphi^i_t - b^i(\varphi_t))^2 dt.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Cramér, Sur un nouveau théorème limite de la théorie des probabilités, Actualités Sci. Ind., 736 (1938).

[2] S. R. S. Varadhan, Asymptotic probabilities and differential equations, Comm. Pure Appl. Math., 19, 3 (1966), 261—286.

[3] А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин, О малых случайных возмущениях динамических систем, Успехи матем. наук, 25, 1 (1970), 3—55.

[4] М. И. Фрейдлин, Функционал действия для одного класса случайных процессов, Теория вероят. и ее примен., XVII, 3 (1972), 535—540.

[5] M. Schilder, Some asymptotic formulas for Wiener integrals, Trans. Amer. Math. Soc. 125, 1 (1966).

[6] С. А. Молчанов. Асимптотика фундаментального решения параболического уравнения при $t \to 0$, Функциональный анализ.

Носко В. П., О возможности использования неравенств Морса для оценки числа выбросов случайного поля в области. (N o s k o, V. P., On applicability of Morse's inequalities for estimation of the number of excursions of a random field in a domain.)

Пусть $z = \zeta(x, y; \omega)$ — вещественное случайное поле на плоскости, $D \subset \mathbf{R}^2$ — область с гладкой, класса C^3, замкнутой границей Γ: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [0,1]$, а $\xi_\Gamma(t, \omega)$ — случайный процесс, индуцированный полем $\zeta(x, y; \omega)$ на Γ.

Реализацию $\zeta(x, y)$ поля $\zeta(x, y; \omega)$ назовем допустимой для уровня r, $-\infty < r < \infty$, если: (а) $\zeta(x,y)$ три раза непрерывно дифференцируема на всей плоскости, (б) $\zeta(x, y)$ не имеет стационарных точек высоты r, (в) стационарные точки $\zeta(x, y)$ не вырождены, (г) траектория $\xi_\Gamma(t)$, индуцированная на Γ реализацией $\zeta(x, y)$ не имеет стационарных точек высоты r, (д) стационарные точки $\xi_\Gamma(t)$ не вырождены.

Заметим, что при этом число стационарных точек $\zeta(x, y)$ в D и число стационарных точек $\xi_\Gamma(t)$ на Γ оба конечны.

Выбросами поля $\zeta(x, y)$ за уровень r называются связные компоненты множества $S_r^\infty = \{(x, y, \zeta(x, y)): \zeta(x, y) \geqslant r\}$. Число $N_r(D)$ выбросов $\zeta(x, y)$ за уровень r в области D естественно определить как число связных компонент множества $\pi_{r,D} = \pi(S_r^\infty \mid XoY) \cap (D \cup \Gamma)$, где $\pi(\,\cdot \mid XoY)$ — оператор проектирования на плоскость XoY. Цель настоящей работы состоит в указании достаточно эффективных верхней и нижней оценок для $\mathbf{E}N_r(D)$.

Естественный подход к оцениванию $N_r(D)$ состоит в том, чтобы использовать известные неравенства Морса, [1], связывающие топологическую структуру ограниченного множества в плоскости XoY с количеством стационарных точек различных индексов поверхности $z = \zeta(x, y)$ и функции $z = \xi_\Gamma(t)$, принадлежащих, соответственно, внутренности этого множества и его границе. Однако, применить неравенства Морса непосредственно к интересующему нас множеству $\pi_{r,D}$ не представляется возможным. Дело в том, что $\pi_{r,D}$, в общем случае, многообразие с краем и угловыми точками. В то же время наиболее близкие к нашему случаю известные условия применимости неравенств Морса, [2], включают в себя требование гладкости, класса C^3, края рассматриваемого многообразия.

В связи с этим, основным моментом доказательства является построение множества $\pi_{r,D}^*$, которое имело бы столько же компонент, сколько и $\pi_{r,D}$ и к которому могли бы быть применены неравенства Морса. С этой целью, каждая компонента множества $\pi_{r,D}$ «сглаживается» в некоторой окрестности каждой угловой точки ее границы. (Заметим, что все эти угловые точки расположены на Γ.) При этом сглаживание выполняется таким образом, что: (а) все стационарные точки $\zeta(x, y)$, содержащиеся в каждой компоненте A, множества $\pi_{r,D}$, содержатся в соответствующей ей компоненте A^* множества $\pi_{r,D}^*$ и наоборот; (б) траектория $\xi_{\gamma^*}(t)$, индуцированная реализацией на границе γ^* компоненты A^*, может иметь стационарные точки, участвующие в неравенствах Морса лишь на границе Γ области D.

Применяя неравенства Морса к «сглаженному» множеству $\pi_{r,D}^*$, получаем

$$\eta^+(\pi_{r,D}^*) - \eta^c(\pi_{r,D}^*) - \eta_\Gamma^-(\partial\pi_{r,D}^* \cap \Gamma) \leqslant N_r(D) \leqslant \eta^+(\pi_{r,D}^*) + \eta_\Gamma^+(\partial\pi_{r,D}^* \cap \Gamma).$$

Здесь $d\pi_{r,D}^*$ — граница множества $\pi_{r,D}^*$, а $\eta^+(\Delta_2)$, $\eta^c(\Delta_2)$, $\Delta_2 \subset D$ и $\eta^-(\Delta_1)$, $\eta^+(\Delta_1)$, $\Delta_1 \subset \Gamma$, соответственно, число локальных максимумов и число седловых точек $\zeta(x, y)$ в Δ_2, число локальных минимумов и число локальных максимумов $\xi_\Gamma(t)$ на Δ_1. Используя характер сглаживания, в последних соотношениях можно заменить $\pi_{r,D}^*$ на $\pi_{r,D}$. Кроме того, они только усилятся, если заменить $\partial\pi_{rD}^* \cap \Gamma$ на Γ. Учитывая эти замечания, получаем следующий результат.

Теорема. *Если D — определенная выше область с гладкой границей, а реализации поля $\zeta(x, y)$ допустимы для уровня r с вероятностью* 1, *то*

$$\mathbf{E}\eta^+(\pi_{r,D}) - \mathbf{E}\eta^c(\pi_{r,D}) - \mathbf{E}\eta_\Gamma^-(\Gamma) \leqslant \mathbf{E}N_r(D) \leqslant \mathbf{E}\eta^+(\pi_{r,D}) + \mathbf{E}\eta_\Gamma^+(\Gamma).$$

Входящие в левую и правую часть последнего неравенства математические ожидания могут быть определены по известным формулам [3].

ЛИТЕРАТУРА

[1] Дж. Милнор, Теория Морса, М., изд-во «Мир», 1965.

[2] M. Morse, B. Van Schaak, Critical point theory under general boundary conditions, Duke Math. J., 2, 2 (1936), 220—242.

[3] Ю. К. Беляев, О всплесках и бликах случайных полей, ДАН СССР, **176**, 3 (1967), 495—497.

Заседание 28 марта

Орлов А. И., Переход от сумм к интегралам и его применения в изучении асимптотических распределений статистик. (Orlov A. I., Substitution of sums by integrals and its applications to asymptotic distributions of statistics.)

1. Опишем многомерный аналог асимптотического разложения Эйлера — Маклорена. Пусть T — множество точек с целыми координатами p-мерного линейного пространства. Решеткой назовем множество $hT + a$, где число h — шаг решетки, все координаты вектора a лежат в $[0, 1]$. С каждой точкой решетки свяжем куб с центром в этой точке, ребра которого параллельны осям координат и имеют длину h. Кубы заполняют пространство без пропусков и наложений. Будем изучать сумму (по подмножеству A точек решетки) значений функции $f(x)$, $x = (x^1, \ldots, x^p)$, достаточное число раз дифференцируемой. Опишем переход от суммы к асимптотическому разложению по степеням h, коэффициенты которого — интегралы по объединению кубов, связанных с точками A. Пусть x_0 — центр куба B. Разложим $f(x)$ по формуле Тейлора в точке x_0. Для демонстрации метода выпишем лишь члены с первыми четырьмя производными:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{1 \leqslant k \leqslant 4} \frac{1}{k!} D_x^k f(x_0) + \ldots, \tag{1}$$

где $D_x^k f(x_0) = \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant p} (x^i - x_0^i) \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^k f(x_0)$. Проинтегрируем почленно обе части (1) по кубу B. Интегралы слагаемых, в которые хотя бы одно приращение переменных входит в нечетной степени, равны нулю. Таким образом,

$$\begin{aligned} f(x_0)\, h^p = \int_B f(x)\, dx - \frac{h^2}{24} \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i^2}\, h^p - \\ - \frac{h^4}{3456} \sum_{1 \leqslant i \neq j \leqslant p} \frac{\partial^4 f(x_0)}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}\, h^p - \frac{h^4}{1920} \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \frac{\partial^4 f(x_0)}{\partial x_i^4}\, h^p - \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

К каждому слагаемому в правой части (2) можно применить аналогичное преобразование. Например,

$$\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i^2}\, h^p = \int_B \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}\, dx - \frac{h^2}{24} \sum_{1 \leqslant j \leqslant p} \frac{\partial^4 f(x_0)}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}\, h^p - \ldots \tag{3}$$

Подставим (3) в (2):

$$f(x_0)\, h^p = \int_B f(x)\, dx - \frac{h^2}{24} \sum_{1 \leqslant i \leqslant p} \int_B \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2}\, dx + O(h^4).$$

Действуя аналогично, для любого l можно получить асимптотическое разложение с остаточным членом порядка h^{2l}. Остаточный член можно оценивать и получать точные формулы типа $a = b + \theta c$, $|\theta| < 1$.

2. В дальнейшем многомерный аналог разложения Эйлера — Маклорена применяется для сравнения вероятностей попадания в область случайных векторов α и β, причем α имеет полиномиальное распределение, β — гауссовское с теми же первыми двумя моментами, что и α. В частности, для статистики χ_n^2 отклонение от предельной вероятности попадания в соответствующую систему кубов имеет порядок n^{-1} (где n — объем выборки), и скорость сходимости к пределу определяется разностью между объемом эллипсоида и числом целых точек в нем, т. е. вероятностная задача сводится к теоретико-числовой (ср. [1]).

Рассмотрим k независимых выборок с объемами $n(1), \ldots, n(k)$ из равномерного распределения на $[0, 1]$. Пусть $S_{n(i)}$, $i = \overline{1, k}$,— соответствующие эмпирические функции распределения,

$$\xi_{n(i)} = \sqrt{n(i)}\,(S_{n(i)}(x) - x),\ n = (n(1), \ldots, n(k)),\quad a_n = \min(n(1), \ldots, n(k)),$$
$$f_n(x, \xi) = f_n(x, \xi_{n(i)}(g_j(x))),\ i = \overline{1, k},\ j = \overline{1, l},$$

$g_i(x)$, $j = \overline{1, l}$ — функции, отображающие $[0, 1]$ в себя, $h_n(x) \to x$ по вероятности, $d_n(x) = \sqrt{a_n}\,(h_n(x) - x)$. В математической статистике используются случайные величины

$$\int_0^1 f_n(x, \xi)\, dh_n(x)$$

с функциями распределения $F_n(z)$. Такой вид имеют статистика Мизеса — Смирнова ω_n^2, ее обобщение на случай k выборок, статистики типа ω^2, применяемые в проблеме двух выборок, для проверки симметрии распределения [2] (часть результатов [2] повторена в [3]).

Пусть $F_n(z)$ сходятся при $a_n \to \infty$ к функции распределения $F(z)$. Положим $\Delta_n = \sup\{|F_n(z) - F(z)|,\ -\infty < z < \infty\}$. Представляют интерес оценки скорости сходимости

$$\Delta_n = O_\varepsilon(a_n^{-b+\varepsilon}), \tag{4}$$

где постоянная в O_ε, $\varepsilon > 0$, зависит только от ε.

Теорема 1. *Пусть при любых целых $r > 0$, $t \geqslant 0$ функция*

$$\mathrm{M} f_n(x_1, \xi) \ldots f_n(x_r, \xi)\, d_n(y_1) \ldots d_n(y_t)$$

сколько угодно раз дифференцируема в каждой замкнутой области, где не меняется упорядоченность переменных x_i, y_j, $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, t}$, отношением $\geqslant$, а производные ограничены постоянными, не зависящими от n. Пусть существует α, такое, что

$$|y|^\alpha \sum_{1 \leqslant i \leqslant kl} \left| \frac{\partial f_n(x, y)}{\partial y_i} \right| \to 0$$

при $|y| \to \infty$ равномерно по x, n (вектор y имеет размерность kl). Пусть у $F(z)$ существует ограниченная плотность. Тогда оценка (4) справедлива при $b = 1/2$.

Условия теоремы выполнены для перечисленных выше статистик. Пример второго выборочного момента равномерного распределения показывает, что для описанного класса статистик $1/2$ является точным порядком сходимости. Однако для отдельных статистик порядок может быть выше, например, для первого выборочного момента. Для статистики ω_n^2 доказывали оценку (4) при различных b: В. В. Сазонов — при $b = 1/10$ (1968) и $1/6$ (1969), Розенкранц — $1/5$ (1969), докладчик — $1/3$ (1971), Я. Ю. Никитин — $1/4$ (1972), Кифер — $1/4$ (1972). Оценка (4) для ω_n^2 неверна при $b > 1$.

Метод доказательства теоремы 1 основан на переходе к интегралу от ступенчатой функции, постоянной на $\left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right)$, $i = \overline{1, m}$, $m = C[a_n^\beta]$, $\beta < 1/2$, и асимптотическом исследовании полиномиального распределения, порожденного $\{\xi_{n(i)}(g_j(d_r)),$ $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, l}$, $d_r = \frac{r - 1/2}{m}$, $r = \overline{1, m}\}$. Метод применим и к статистикам типа Колмогорова — Смирнова.

Теорема 2. *Пусть* $F_n(z) = \mathbf{P}\{f_n(x, \xi) < z, a \leqslant x \leqslant b\}$, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, $F_n(z)$ *сходятся при* $a_n \to \infty$ *к функции распределения* $F(z)$, *имеющей ограниченную плотность*, $|f_n(x, y) - f_n(x', y')| \leqslant A|y - y'| + B|x - x'|^{1/2}$ *для всех* y, y', $0 \leqslant x, x' \leqslant 1$. *Тогда* $\Delta_n = O(a_n^{-1/4+\varepsilon})$, *постоянная зависит только от* A, B *и* $\varepsilon > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Калинин, О. В. Шалаевский, χ^2 как критерий независимости в таблице сопряженности признаков, Записки научных семинаров Ленингр. отд. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 26 (1972), 88—117.

[2] А. И. Орлов, О проверке симметрии распределения, Теория вероят. и ее примен., XVII, 2 (1972), 372—377.

[3] E. D. Rothman, M. Woodroofe, A Cramér — von Mises type statistic for testing symmetry, Ann. Math. Statist., 43, 6 (1972), 2035—2038.

Мешалкин Л. Д., Априорная оценка числа ассоциаций между риск-факторами и частотой осуществления события в эпидемиологических исследованиях хронических заболеваний. (Mešalkin L. D., An a priori estimate for the number of associations between risk factors and frequency of an event in epidemiological studies of chronic diseases.)

Пусть для описания условной вероятности события (случай заболевания или смерти) используется функция вида $g(\mathbf{c}^T\mathbf{x})$, где g — известная функция, $\mathbf{x} = (1, x_1, \ldots, x_p)^T$ — вектор риск-факторов, а $\mathbf{c}$ — вектор констант, оцениваемых по выборке. В [1] для дихотомических x_i предложена априорная оценка максимального числа статистически значимых ассоциаций, которые могут быть найдены в планируемом исследовании. Эта оценка опирается на 1) априорную оценку сверху пределов изменения условной вероятности события, когда дано $\mathbf{x}$, и 2) на оценку снизу асимптотической дисперсии коэффициентов c_i, $i = \overline{1, p}$. Перенос метода на случай непрерывного $\mathbf{x}$ невозможен без дополнительных предположений о характере распределения $\mathbf{x}$.

В эпидемиологии сердечно-сосудистых заболеваний показано [2], что хорошие прогностические формулы получаются с помощью предположения, что Q — распределение x, когда событие не осуществилось, и P — распределение $\mathbf{x}$, когда событие осуществилось,— оба являются p-мерными нормальными с общей ковариационной матрицей. Если принять это предположение, то вместо оценки пределов изменения условной вероятности можно оценить сверху расстояние Махаланобиса между центрами P и Q. Для нескольких эпидемиологических исследований подобные оценки приведены в [3]. Поскольку событие осуществляется не более, чем в 10% всех наблюдений, то основная выборочная ошибка связана с определением параметров P. Учитывая этот факт, примем дополнительное упрощающее предположение, что вектор средних и ковариационная матрица Q известны. В сделанных предположениях выборочное завышение расстояния Махаланобиса между центрами P и Q равно p/k, где k — объем выборки из P. Сделаем теперь линейное преобразование $\mathbf{x}$ так, чтобы ковариационная матрица стала единичной. Асимптотическая дисперсия преобразованных коэффициентов есть $1/k$.

Если считать статистически значимыми те коэффициенты, оценка которых в a раз превышает соответствующее стандартное отклонение, то каждый, признанный статистически значимым коэффициент увеличивает расстояние Махаланобиса не менее, чем на a^2/k. Но расстояние Махаланобиса было априори ограничено сверху. Следовательно, можно оценить число коэффициентов, которые могут быть признаны значимыми. При использовании этого метода полезно учитывать, что коэффициенты, стоящие перед такими переменными как возраст, составляющая кровяного давления, перпендикулярная к возрасту, и т. п. могут быть также оценены (снизу) априори. Это приводит порой к уменьшению оценки числа новых статистически значимых ассоциаций в несколько раз.

ЛИТЕРАТУРА

[1] L. D. Meshalkin, Maximum number of statistically significant associations between risk factors and the frequency of an event in observational studies, Biometrika 60, 1 (1973).

[2] Max Halpern, W. C. Blackwelder, J. I. Verter, Estimation of the Multivariate Logistic Risk Function: A Comparison of the Discriminant Function and Maximum Likeliood Approaches, J. Chron. Dis., 24 (1971), 125—158.

[3] L. D. Meshalkin, Some mathematical methods for the study of non-communicable diseases, Proc. VI Conference IEA, 1972, 250—256.

Заседание 11 апреля

На заседании обсуждались вопросы подготовки кадров специалистов в области теории вероятностей, математической статистики и их приложений. Зав. кафедрой математической статистики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ Ю. В. Прохоров и и. о. зав. кафедрой теории вероятностей МИЭМ Г. И. Ивченко информировали участников заседания об учебных планах и программах их кафедр. В обсуждении приняли участие Л. Н. Большев, Ю. А. Розанов, А. А. Боровков, Г. П. Башарин, Б. Р. Левин, Я. И. Хургин.

Заседание 25 апреля

Заседание началось с вступительного слова Б. А. Севастьянова, поздравившего Андрея Николаевича Колмогорова от имени всех участников секции с днем рождения. Затем адреса и поздравления Андрею Николаевичу Колмогорову от имени математиков Новосибирска, Ташкента и Вильнюса вручили А. А. Боровков, С. Х. Сираждинов и В. А. Статулявичус, а от имени общества «Знание» — Б. В. Гнеденко. После ответного выступления А. Н. Колмогорова были заслушаны следующие короткие (15 мин.) доклады:

1. Ю. К. Беляев, Критерий Колмогорова для выборок из конечной совокупности.

2. Р. Л. Добрушин, М. С. Пинскер, Сложность алгоритмов кодирования и декодирования в теории информации.

3. В. М. Золотарев, Оценка близости двух сверток распределений.

4. Ю. А. Розанов, Некоторые примеры «обновления» случайных процессов.

5. Я. Г. Синай, Об инвариантных мерах для динамической системы одномерной статистической механики.

6. А. Н. Ширяев, Развитие идей А. Н. Колмогорова в статистическом последовательном анализе.

Заседание 16 мая

Вайнштейн Л. А., Естественные пороги значимости для коэффициентов разложения функции, известной неточно. (Vainštein L. A., Natural thresholds of significance for decomposition coefficients of a function known not exactly.)

Писаренко В. Ф., Оценка параметров двух гармоник со сближающимися частотами на фоне шума. (Pisarenko V. F., Parameter estimation for two harmonics with closing frequencies on the noise background.)

Рассматривается случайный процесс $y(j)$ с дискретным временем:

$$y(j) = a_1 \cos \omega_1 j + a_2 \cos \omega_2 j + n(j), \quad j = 0, 1, \ldots, N,$$

где a_1, ω_1, a_2, ω_2 — неизвестные параметры, а $n(j)$ — последовательность гауссовских независимых случайных величин с нулевым средним и дисперсией $\sigma^2 = 1$ (белый шум).

Пусть параметры a_1, a_2 отличны от нуля, а частоты ω_1, ω_2 сближаются с ростом N по закону $\omega_1 = \omega_0 - dN^{-\gamma}$, $\omega_2 = \omega_0 + dN^{-\gamma}$, где ω_0, d, γ — некоторые константы, причем $\omega_0 \neq 0, \pi$.

Теорема 1. *Если $N \to \infty$ и $0 \leqslant \gamma < 7/6$, то оценки максимального правдоподобия $\hat a_1$, $\hat\omega_1$, $\hat a_2$, $\hat\omega_2$ для соответствующих параметров состоятельны и асимптотически нормальны. При этом, если $\gamma < 1$, то*

$$(\hat a_1 - a_1)\sqrt{N/2},\quad a_1(\hat\omega_1 - \omega_1)\sqrt{N^3/6},\quad (\hat a_2 - a_2)\sqrt{N/2},\quad a_2(\hat\omega_2 - \omega_2)\sqrt{N^3/6}$$

имеют предельное сферическое стандартное нормальное распределение. Если же $1 < \gamma < 7/6$, то дисперсии и все коэффициенты корреляции предельного распределения случайных величин

$$(d^3/15)\sqrt{8/7}(\hat a_1 - a_1)N^{7/2-3\gamma},\quad (a_1 d^2/15)\sqrt{8/7}(\hat\omega_1 - \omega_1)N^{7/2-2\gamma},$$
$$-(d^3/15)\sqrt{8/7}(\hat a_2 - a_2)N^{7/2-3\gamma},\quad (a_2 d^2/15)\sqrt{8/7}(\hat\omega_2 - \omega_2)N^{7/2-2\gamma}$$

равны единице. При $\gamma = 1$ предельное распределение отличается от описанных.

Утверждение теоремы относительно $\hat\omega_1$ и $\hat\omega_2$ при $\gamma = 0$ совпадает с результатом [1], [2], для оценок максимального правдоподобия постоянных (не сближающихся при $N \to \infty$) частот. Теорема 1 справедлива и для синусоидальных гармоник. Если $a_1 = 0$, $a_2 = a$ и $\omega_2 = \omega$, то имеет место

Теорема 2. *Если $N \to \infty$, $\omega = dN^{-\gamma}$ и $0 \leqslant \gamma < 5/4$, то оценки максимального правдоподобия $\hat a$ и $\hat\omega$ состоятельны и асимптотически нормальны. При этом, если $0 \leqslant \gamma < 1$, то $(\hat a - a)\sqrt{N/2}$ и $a(\hat\omega - \omega)\sqrt{N^3/6}$ имеют предельное круговое стандартное нормальное распределение. Если же $1 < \gamma < 5/4$, то дисперсии предельного распределения случайных величин $(2/3)(\hat a - a)\sqrt{N}$ и $(2ad/3)(\hat\omega - \omega)\sqrt{N^{5-4\gamma}/5}$ равны единице, а коэффициент корреляции равен $\sqrt{5}/3$.*

Предположим теперь, что $y(j) = b\sin\omega j + n(j)$, $j = 0, 1, \ldots, N$.

Теорема 3. *Если $N \to \infty$, $\omega = dN^{-\gamma}$ и $0 \leqslant \gamma < 7/6$, то оценки максимального правдоподобия $\hat b$ и $\hat\omega$ состоятельны и асимптотически нормальны. При этом, если $0 \leqslant \gamma < 1$ то, $(\hat b - b)\sqrt{N/2}$ и $b(\hat\omega - \omega)\sqrt{N^3/6}$ имеют предельное круговое стандартное нормальное распределение. Если же $1 < \gamma < 7/6$, то дисперсии предельного распределения случайных величин*
$(2d^3/15)(\hat b - b)\sqrt{N^{7-6\gamma}/7}$ и $(bd^2/15)(\hat\omega - \omega)\sqrt{N^{7-4\gamma}/7}$ *равны единице, а коэффициент корреляции равен* $-1/2$.

Теоремы 1—3 справедливы и для процессов с непрерывным временем, при этом N следует заменить длиной интервала наблюдения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] P. Whittle, The simultaneous estimation of a time series harmonic components and covariance structure, Trabajos de Estadistica, 3 (1952), 43—57.

[2] A. M. Walker, On the estimation of a harmonic component in a time series with stationary independent residuals, Biometrika, 58, 1 (1971), 21—36.